

問題解決における数学的思考について

三 塚 正 臣*

On the Mathematical Thinking in Problem Solving

Naomi MITSUTSUKA

The important thing that is required in problem solving is to analyze the cognitive structure in mathematical problems. For the analysis it is necessary, first of all, to reconstruct the contents in the problem through mathematical thinking and mathematical strategies in the thinking process, and then to set up a hypothesis of problem solving by means of the transstructure in mathematical thinking. Once a hypothesis is set up, thinking can find where to orient itself and it can advance on the right way to the problem solving. What is no less important in problem solving is to investigate the metacognitive structure. Therefore, this paper is trying to clarify the fact that in mathematical thinking the setting-up of a hypothesis should be done through the functional conversion of thinking behavior into intellectual thinking operation. This paper is also trying to investigate the nature of cognition, metacognitive knowledge and metacognitive action which play a decisive role in problem solving.

1. はじめに

問題解決においては、問題事態の分析によって問題事態の全体的構造がとらえられ、数学的な考えや数学的なストラテジーによって認知的構造がとらえられ、構造変換によって再構成された内容と内容との間の相互関係が連続的に連鎖としてとらえられる。このためには、解決過程において、問題解決における解決の仮説が定立されなければならない。解決の仮説が定立されるならば思考の方向も定まり思考も促進され解決にいたる。問題解決における解決の仮説は問題の条件を構造分析し、既知の内容との関連、数学的な考えや数学的ストラテジーによって問題の思考構造に変化がoccurり、問題の解決の構造をとらえることによって解決の仮説が定立されることを論じた。さらに、問題解決においてはメタ認知が思考の推進に役割をはたしているので、問題解決におけるメタ認知的知識・メタ認知的活動についても追究した。メタ認知には思考の認知的活動に及ぼす影響についての知識、自己の認知についての知識といったメタ認知的知識の側面と認知

* 教養部

の過程や状態を調整するメタ認知的活動の側面があり、これらについても論じた。

2. 問題解決における思考について

問題解決の思考過程においては、諸条件を分析し、これらに関連している原理・概念をとらえ、これらがどのように解決構造と論理的に結合しているかを考える。また、思考操作によって、問題の本質をとらえ、解釈し、単純化したり、帰納的に考えたり、演繹的に考えたり、類推的に考えたり、あるいは累加的に考えることによって、思考経験や数学的思考、数学的なストラテジーによって、部分的結論を再構成し、再構成された内容と内容との間の相互関係をとらえる。さらに、この過程においては再構成された内容と内容との相互関係が論理的に連鎖としてとらえられ¹⁾、知的な操作から別の知的操作へと変換され、新しい観点が設定され、問題の条件の内部構造が機能的に変換され、思考の構造変換がおこなわれる。²⁾

思考過程の特徴は、構造変換または中心転換にある。問題解決がおこなわれるまでには、何段階もの構造変換がおこなわれ、問題事態の構造変換がおこなわれるたびに、事態は一層深く探究され、全体の内的な構造変換がおこなわれる。問題解決における構造変換においては、洞察と直観を必要とする。直観は分析的段階を経ないで暫定的な結論に到達することをいい鋭い推察を必要とする。解決が困難な問題に対しては、洞察あるいはひらめきにより、構造変換がおこなわれ解決の糸口が見出される。このようなひらめきがおこる直前には、一種の前兆があるといわれているが論理的思考の蓄積の結果前兆がおこると考えられる。構造変換は、特徴的には、既知の手段・方法を観点を変えて構造的に変革し、変換する。構造変換がおこなわれるたびごとに、問題自体は一層深くとらえられるので、構造的連関が把握され、内的な構造変換がとらえられ、思考の体系にある一方の関係が他方の関係に変換される。このようにして、もとの問題の本質的な状態が新しい内容の状況に対応し、それぞれの観点に固有な関係を構造的にとらえることができる。このようにして、問題解決における問題事態の全体的構造がとらえられ、再構成され、認知的構造に変化がおこり、解決に最適の手段・方法がとらえられ解決にいたる。即ち、過去の経験や知識によって解決することが困難な問題事態に対して、解決の困難性の分析、数学的な考えや数学的なストラテジーの構造分析、目標の分析によって、その関係を把握し、問題の構造を明らかにし、さらに、そこに含まれる数学的能力の諸因子の分析によって認知的構造に変化がおこり、問題事態が変容して解決が可能になる。さらに、解決のためには条件を分析し、ある種の論理を構成し、新しい着想によって解決のための仮説を形成し、定立しなければならない。³⁾

Dewey は、問題における探究について、解決の不確定な状態から確定した状況に変えることであると述べている。したがってとくに問題の条件を分析しなければならない。そのためには、条件の分析によって、条件を構造としてとらえなければならない。解決の構造分析によって推論され、確定した状態になる。これに対して、Pierce は探究を追究した結果、論理的な認識過程を経験的な事実にもとづいて、それらの局面段階の論理的な構造やそれらの特質の解明を試みることを探究することと考えた。Pierce は、とくに論理的分析と演繹的推論、帰納的な推論にわけ論

理的に探究することを考え、経験的な事実を分析し、明確な論理を構成する推理によって、新しい論理を発見し、新しく着想していくことを述べている。したがって、問題解決における探究は、とくに条件を分析し、構造をとらえ、数学的知識や数学的な考え、数学的なストラテジーによって、解決の構造を分析し、推論し、確定した条件にすることである。

さらに、Pierce は、このことをもとにして、経験的な諸事実を分析し、論理的に考え、仮説を提起することを考え、さらに、提起した仮説を演繹的に推論する段階の必要性を追究し、探究の第三の段階として、提起された仮説を論理的過程によって仮説の真実性を確かなものとする妥当性について検討しなければならないことを述べている。この考えにもとづいて、Pierce は探究の段階を次のように考えた。

(1) abduction (提起) の段階 経験的な事実を分析し、それらの事実を説明する理論によって推論し、新しい論理にもとづいて、仮説を着想し、形成する段階で、事実を種々の側面から思考しはじめる。

(2) deduction (演繹) の段階 探究の第二段階で abduction の過程において形成した仮説を論理的推論によって、可能な結論を考え出す過程で、仮説を検証する前段階あるいは準備段階である。

(3) induction (帰納) の段階 探究の第三段階で abduction の段階で提起した仮説を演繹によって論理的結論を構成し、仮説の真実性を確証する段階である。

Pierce は abduction の段階で提起した仮説を客観的にするために、この三つの段階を提案し、論理的に探究することによって、仮説を演繹的に考えることとし、その仮説の検証を述べている。これらの過程を経て、定立された仮説をより客観的にすることができる。さらに、仮説を修正する必要があるときには仮説を修正し、この段階にしたがって追究し眞の仮説を定立することができる。このことをもとにして、問題解決過程との関係を考えるならば、問題の条件構造分析の段階において、その結果として問題の解決の方法が見出されるのであるから、仮説設定の段階も問題の条件の構造分析の中に含まれ、しかも、問題解決の仮説は、問題の条件を構造分析することによって得られる。したがって、問題の解決のためには、条件の構造を分析し、解決の仮説をたてなければならない。

仮説の提起にあたっては、数学の問題解決において、思考実験を試み、条件の諸事実を分析し、ある種の論理を構成し、完全な明確な論理形式をもって推論し、その過程において新しい論理を発見し、新しい着想によって解決のための仮説を形成する。仮説の提起によって、可能な結論が誘発される。さらに得られた結論によって仮説の妥当性が検証されなければならない。

解決過程においては問題を解決する段階として (1) 問題状況の把握の段階 (2) 問題設定の段階 (3) 問題の条件の構造分析・解決の仮説の設定の段階 (4) 問題解決の推論の段階 (5) 解決の仮説の検証の段階が考えられる。

(1) 問題状況の把握段階 問題の内容を把握し、不確定の状況をとらえ、問題の所在を明確にする段階である。

(2) 問題設定の段階 把握した状況から、問題の条件を設定し問題として明確にする。

(3) 問題の条件の構造分析・解決の仮説の設定の段階 問題の条件を分析し、既知の内容と結びつけ、数学的概念や数学的な考え、数学的なストラテジーによって内部構造をさぐり、解決の仮説を設定し、思考行動に基づいて、結果を予測する。

(4) 問題解決の推論の段階 解決の仮説にもとづいて、論理的推論によって可能な結論を誘発し、客観的に部分的結論をとらえ、部分的結論から次の部分的結論を連鎖として、とらえる段階で、仮説の妥当性を検討する。

(5) 解決の仮説の検証の段階 思考実験によって、妥当な仮説として検証したり、仮説を修正する段階である。

この段階は解決の手順を示す段階で、問題解決における総合的方略である。

問題解決においては、問題の諸条件を分析し、その特徴をとらえ、既知の内容と結びつけ、思考経験や数学的な知識によって広く洞察し、どのようなストラテジー、どのような内容・概念と関連しているか、数学的な考えやストラテジーの分析をもとにして解決の仮説を設定することができるが、仮説によって思考の方向が定まり、意識的・積極的に解決に取り組むことができる。さらに、この解決過程においては類推的思考が機能し、解決の仮説をたてることがある。他の問題の条件と類似している場合、思考においても類似点、相異点、共通点をとらえ、類推的思考によりこのことをもとにして解決の仮説を設定することができる。

解決における仮説を設定するには、帰納的推論能力がなければならない。帰納的推論は個々の事態の観察にもとづいて、一般化をおこない、それを新しい状況に適用することであると述べているが、過去の経験や反応の観察あるいは思考の事態を分析して、規則や構造を見出し、数学的なあるパターンを帰納することである。Holland は帰納とは、不確実な状況において知識を拡張する推論過程のすべてを含むものとしている。また Johnson Laird は、帰納とは、初期の観察や命題に対して意味情報を増加させ、可能性を限定し結論を導く思考であると述べている。したがって、帰納的推論は、過去の経験や現在の思考行動や思考反応にもとづいて、個々の事態を分析し、数学的な規則や構造を見出したり、抽象的概念、さらには、知識を形成する能力により一般化を帰納し、未来の行動を帰納することであるといえる。帰納的推論を事例獲得、仮説形成、仮説検証について考える。帰納的推論の第一段階は、命題を把握したり、記憶想起によって事例情報を収集する。第二段階は、この収集された情報にもとづいて、個々の事態を分析し、規則・構造をさぐり、仮説を形成する。仮説は何通りも生成可能であるが、有効な仮説を生成することが大切であるが仮説は認知システムの目標に合致し妥当でなければならない。事象に類似性があるときには共通した属性や規則性を帰納することができる。次の段階においては、仮説にもとづく結論を観察事実にもとづいて評価し、仮説を保持するか仮説を修正する。さらに、仮説検証においては論理的に考察した内容が真であれば仮説は確証される。帰納的推論能力は未知の領域に関係する仮説の形成ならびに検証における基礎的能力であるといえる。また、問題が複雑なときには、解決の思考過程において類推的思考がはたらき、解決の方法の仮説を定立することができる。

問題の条件分析において、他の問題の条件と類似していることから既知のものを構造的に把握し、その解決の方法をもとにして、他の事象の解決の方法との共通性、類似性、あるいは相異性をとらえ、帰納的推論により解決の方法の仮説を定立する。

3. 問題解決における思考のメタ認知について

問題解決における思考に重要な役割をはたすのにメタ認知がある。Lester はメタ認知は問題解決過程において推進力の役割をはたすと述べている⁴⁾。メタ認知は、認知的行動を推進するのみならず広範囲な非認知的要因（態度）と結びついたものとみなされるようになったと Lester は述べており、メタ認知とは思考に対する反応、あるいは自分自身の考えに対する思考といわれる。認知はせまい意味で知識と同じように考えられる。即ち、直接的な数学的活動に働らく知識や技能を意味する。これに対して、うまく知識や技能が活用されている等知識についての知識、自分自身の認知を調整する作用がメタ認知であると考えられる。即ち、認知についての認知といえる。メタ認知は思考活動において注意をむけ、意識化する必要がある。問題解決においては、課題を達成させるための根拠あるいは原因あるいは解決の動機づけとの関連が大きい。メタ認知によって解決の仮説を演繹し、さらにそれを評価しようとする方略を考えるあるいは問題解決過程における自己の理解状態をとらえようとする。即ち、メタ認知には課題の性質・特徴が認知的活動に及ぼす影響についての知識、自己の認知についての知識といったメタ認知の知識的側面と認知のプロセスや状態をモニターしコントロールあるいは調整を実際におこなうこと即ち自己の認知の調整・制御といったメタ認知的活動さらにこのようなメタ認知的活動を効果的に行い得る技能であるメタ認知的スキルが考えられる。メタ認知的知識は、既知の知識と技能に対応させて、自己に関するメタ認知的知識、課題に関するメタ認知的知識、方略に関するメタ認知的知識のカテゴリーに分類される。メタ認知的知識は自己あるいは他者に固有の認知の傾向、課題の性質・特徴が認知におよぼす影響についての知識あるいは方略の有効性についての知識または目的に応じた効果的な方略の有効性又は目的に応じた効果的な方略の使用についての知識である。メタ認知的活動は、メタ認知的モニタリングとメタ認知的コントロールで、メタ認知的モニタリングは、ここが理解できないといった認知の気づき (awareness)、なんとなくわかっているといった感覚 (feeling)、この問題は解決できるといった予想 (Prediction)、このような考えでよいのかといった点検 (checking)、これで解決できるといった評価 (assessment) などが含まれている。また、メタ認知コントロールには、問題を完全に理解しようといった認知の目標設定 (goal setting) あるいは簡単なわかることから始めようといった方略をはじめとする計画、あるいは、この解決の方法ではなく、他の考え方をしようといった修正などの数学的活動を意味する。これらのメタ認知的活動を効果的に行ない得るメタ認知的スキルを考えなければならない。問題解決においてはさらに自らの理解状態をモニターすることが重要である。メタ認知モニタリングにはいくつかのレベルがある。解決の予想にも自己や課題についてのメタ認知的知識にもとづく分析的判断による解決の予想がある。また、問題の解決においては記憶を探索する漸進的な場合に対し

て洞察的に問題を解決する場合には非漸進的で構造変換により解決される。

(1) メタ認知と注意について

問題解決における思考についてのメタ認知的活動においては、思考に注意し意識化する必要がある。注意の本質は意識の焦点化と集中化にある。集中すべき内容を決定し重要度の高いものから考える。注意が適切に機能することがメタ認知的活動を支えている。注意が十分に機能しなくなると情報の処理が困難になる。メタ認知的活動が阻害されるならば自己の認知を意識化することが出来ない。即ちメタ認知的モニタリングが阻害される。さらにメタ認知的モニタリングが機能しない場合あるいは、認知への意識的な気づきのない状態では認知が誤った場合においてもこれを修正することができない。認知の修正にはモニタリングが不可欠である。しかし、モニタリングが役立つのは、誤りの修正だけでなく、自己の思考を促進する。メタ認知的モニタリングは適応的な判断をするために重要なはたらきをしていることがいわれ、メタ認知により思考の傾向を知ることができ合理的に思考することにおいて重要なはたらきをする。

(2) メタ認知における思考の方略の獲得と転移について

メタ認知において、直接的に思考に結びつくのは方略の適用である。したがって効果的な方略に関心をもたなければならない。思考における方略には認知的方略とメタ認知的方略がある。認知的方略はある問題に対してどのように解決していけばよいか特定の認知活動を一層促進するための計画である。これに対して、メタ認知的方略は、メタ認知的活動を一層効果的に運営するための計画で、メタ認知を機能させるように、自己の思考を言語化あるいは図的表現により自分自身で評価できるようにすることである。Zimmerman は学習に際してのメタ認知方略を自己調整学習方略といい、これを主体的に用いる学習者を自己調整学習者といっている。メタ認知活動を促進するためにはコミュニケーションによる調整をおこなうことである。さらに獲得した方略を他の課題に転移させることが重要である。方略の獲得の類似の状況への転移は容易であるが非類似の状況には転移はおこりにくい。Perkins は有効な方略を教授する条件の一つとして、方略を転移させるには、問題を解決する過程において、その方略を獲得するときの状況を明確に言語化して述べることを提唱している。また、Berardi-Colleta は方略を意識化させるために、課題の解決過程を意識化させ、課題を遂行することによって方略を転移させることを促している。即ち、問題の解決過程として意識的に条件の構造分析を言語化し、解決の仮説を定立していく過程において問題解決における方略の獲得を言語化することと考える。Perkins は、問題解決のパターンを類似の状況に適用する低次の転移から解決の困難な問題に対して他の問題の解決において得られた方法を注意深く適用するという方略の高次転移を考えた。このために方略を形式的に覚えたりあてはめるというのではなく、転移を目的とした方略の獲得には意図的な意識化、言語化のメタ認知的要素が不可欠である。類推による思考の転移は媒体となる抽象的な構造をもった類似の構造をもついくつかの問題の解決の構造を分析し、それらの解決の構造の共通性を見出し意識化することによって異なると思われる問題も本質的には同型の解決構造をもつ問題としてとらえ解決が可能となる。この解決過程においても方略をメタ認知的活動として考えなければなら

ない。転移を目的とした方略の獲得には、方略の構造を分析し、どのような問題の解決の構造をもっているかを意識化し、数学における解決の構造を言語化し、これをもとにして異なると思われる問題の解決の構造を分析し、類似性・共通性・相異性を意識化し言語化し、それをもとに同型の解決構造をもつ問題としてとらえ解決することができる。したがって、意図的な意識化、言語化といったメタ認知的要素が不可欠である。メタ認知的知識をもっている学習者は、新しい場面に直面したときにも類似のものか同一のものかを判定する。さらに、数学的思考においては、問題解決において問題の条件を意識化してとらえ、どのような数学的なストラテジーを用いるかを選択し、適用することになるのでメタ認知と密接な関連があるといえる。したがって、必要なメタ認知能力を育成しなければならない。Mechel pressly は問題解決において最適のストラテジーを選択し適用する人はストラテジーについてのメタ認知的知識、知識ベース、認知的スタイル、動機づけにかかわる認知的要素を調節できると述べている。ストラテジーについてのメタ認知的知識を分類するとストラテジーに関する知識即ち認知作用をよくするためのストラテジーに関する知識、ストラテジーについての価値に関する知識に分類される。したがって、いつ、どこで、どのようにストラテジーを用いたかの知識、思考における認知作用のどの側面においてどのようなストラテジーが有効であるか、またストラテジーの有効性を感得するメタ認知が必要である。さらに、Pressley は、動機づけについて、数学的思考における動機づけとは、認知的課題についての認知を考えることであると述べているがメタ認知の性格をもっている。Lester や Garofal は、数学的なストラテジーを適用して問題解決に役立たせているか、ストラテジーを課題や目標の達成に役立たせているかをモニターし、そうでなければストラテジーを変更しなければならないことを述べている⁹⁾。このことはメタ認知的技能の調整的側面である。メタ認知的技能の調整的側面は、メタ知識に照合して認知作用を直接的に調整することで、認知的課題または問題に取り組んでいる過程においておこなっている様々の決定やストラテジーについて、Lester はメタ認知的技能の調整として、課題や問題の本質を理解することを援助するようなストラテジーを選ぶこと、思考行動の方向を計画すること、計画を実行すること、計画を実行するための適切なストラテジーを選ぶこと、ストラテジーを評価すること、不必要な非生産的なストラテジーを訂正したり修正、変更することを述べている。即ち、メタ認知的技能の調整として重要な要因である。さらに、メタ認知的スキルは、数学的なストラテジーを決定し、課題を分析することに重要なものである。問題解決においては、数学的方略の構造分析とともに、数学的な方略のメタ認知的知識・メタ認知的技能等を追究しなければならない。

4. おわりに

問題解決における数学的思考について考察し、問題解決においては解決の仮説を定立しなければならないことを論じた。問題解決における仮説は、問題のもつ条件の構造分析、数学的な考えや数学的な方略によって解決構造をとらえる過程において解決の仮説が定立される。さらに、問題解決においては、解決の仮説を定立することによって思考も深まり思考の方向が定まり思考が

促進される。あわせて、数学の問題解決においては、思考のメタ認知が問題解決の思考の推進力の役割をはたしているので、問題解決におけるメタ認知的知識とくに数学的な方略についてのメタ認知について追究した。

参 考 文 献

- 1) 三塚正臣：学校数学における問題解決のストラテジーの分析について 福井工業大学研究紀要第21号 1991 p.p.211
- 2) 三塚正臣：問題解決における数学的思考能力について 福井工業大学研究紀要第24号 1994 p.p.241
- 3) 三塚正臣：問題解決における数学的思考と方略との関係について 福井工業大学研究紀要第26号 1996 p.p.296
- 4) Lester F.K: Musings about Mathematical Problem-Solving Research, Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 25 No.6 1994 p.p.660
- 5) Garofalo J, Lester F.K : Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance, Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 16 No.3 1985 p.p.163-165

(平成8年10月29日受理)