

非線形写像によるカオスII

山 岸 留次郎

Chaos induced by Nonlinear Mapping II

Tomejiro YAMAGISHI*

Abstract: The intermittent transition to chaos has been studied through the use of a simple square root mapping of the form: $x=c-|x|^{1/2}$. A stable state is found to change to chaotic state at $c=0.25$ via the inverse tangent bifurcation. The chaotic state has been examined by the three different methods: the return mapping method, orbit stability criterion by the Liapunov exponent, and the frequency power spectrum calculated by the fast Fourier transformation.

1.はじめに

非線形写像の分岐現象の典型的な例として、不動点の倍周期分岐過程を $x'=c-x^2$ のマッピングの計算により先に示した¹⁾。この分岐によりカオスに至る過程はすべて非線形項 x^2 が原因している。そこで、 x^2 のかわりに x^3 にするとどうなるかということが、自然に考えられる。この場合とくに珍しい現象は見られない。それならば非線形項を $x^{1/2}$ とするとどうなるかという疑問が起こる。この場合 $x'=c-|x|^{1/2}$ によるマッピングをくりかえしたときの不動点の計算を行なったところ、これまでにみられた倍周期分岐と全く異なった珍しい、ある状態で突然無数の不動点が発生する現象がみられたので、その計算機実験結果とその考察の一部について報告する。

流体実験でレイノルズ数を変えていくと、ある値で層流から乱流状態へ遷移するとき、間欠的遷移 (intermittent transition) という現象が報告されている。これは静かな層流状態が突然バーストという騒乱状態になり又静かな層流状態に戻り、ある不規則な時間間隔でこのことをくり返す現象である²⁾。ここで報告する平方根マップはこの間欠的カオスを再現する非常に簡単なモデルの一例であることがわかった。

不動点とは物理的には、系の安定な平衡または定常状態を表すが、計算機で分岐による多数の不動点を計算しても、それが準周期的な軌道なのか又はカオスなのかは判別しにくいことがある。そこで軌道の安定性を判別するリヤプーノフ数を計算することにより、間欠的カオスになっていることが判明した。実験ではデータのフーリエ変換を行ない周波数についてのパワースペクトル分布により乱流状態を診断することが多い。この方法は手間のかかる方法であるが騒乱の周波数分布の詳細が分かり、古くから広く用いられている。ここで扱う平方根マップについても、高速フーリエ変換³⁾ を用いてパワースペクトル分布を計算しカオスの状態を調べた。

*教養部

2. 平方根マップ

非線形項が平方根の形の最も簡単な1次元非線形写像

$$x_{i+1} = f(x_i) = c - |x_i|^{1/2} \quad (1)$$

を考える。パラメーター c を少しずつ変化させた時、(1) の写像 $x_i \rightarrow x_{i+1}$ を繰り返して生ずる安定な不動点を前回報告した MATHEMATICA のプログラムにより計算した結果を図1に示す。この図から分かるように、パラメーター $c=0.25$ で1個の不動点から突然”無数”の不動点に遷移する。この場合、倍周期分岐のように倍、倍に変化する過程は見られない。

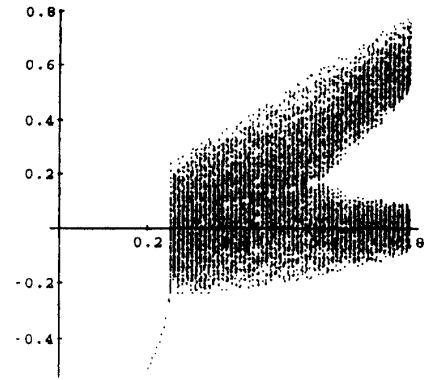


図1

なぜこのようになるのかを調べるため、写像関数 $y = f(x)$ と $y = x$ の $c=0.25$ 附近の様子を図2に示す。(1) 式で $x_i = x_{i+1}$ が負の重根の条件から厳密に $c=0.25$ が求まる。 $c < 0.25$ のとき、2つの不動点があるが小さい方が安定でアトラクター（吸引点）であり、大きい方が不安定でリペラーと言われるものである。この場合すべての軌道はアトラクターに吸収される。これは図1で $c < 0.25$ のとき1個の不動点であることに対応している。

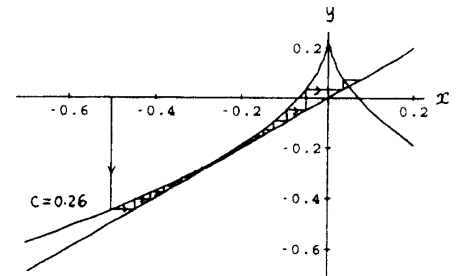


図2

$c > 0.25$ の場合、 $y = c - |x|^{1/2}$ と $y = x$ の間に狭いすきまができ軌道はこの狭い領域に捕捉されて、通過するのに多数回往復を繰り返して長い時間を経過したあと右方の領域にでる。ところが、この領域に不安定な不動点（リペラー）があるので軌道は反射されて、この狭い領域に戻されてくる。このことを何回も繰り返すが決して元の軌道に戻らないので周期軌道とならず、カオス状態になる。これが間欠的カオスのシナリオである。

```

f[x_]:=c-Sqrt[Abs[x]];fx[x_]:=f[f[x]];
xo=-0.7;c=0.18;imax=17;
z=Table[{0.,0.},{imax}];z[[1]]={xo,0.};
Do[xn=f[xo];z[[i]]={xo,xn};z[[i+1]]={xn,xn};
xo=xn,{i,2,imax,2}];
Show[Graphics[Line[z]]]
    
```

この状況を調べるため、 $c=0.25$ の場合のリターンマップを図3に示す。又このリターンマップを画く MATHEMATICA のプログラムも示す。周期軌道の場合ある回数以上リターンマップを繰り返しても軌道の形は変わらない。カオスの場合、このリターンマップを無限回繰り返すとある領域をうめつくす。この場合は線の太さがあるので1000回で埋め尽くしたが、図3では軌道の様子を見るため440回で打ち切った。

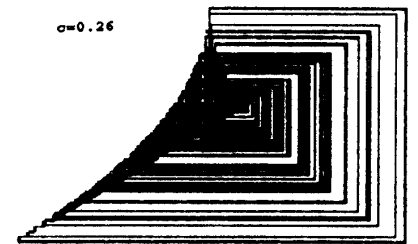


図3

(1) 式のマッピングで得られた振幅の列 $\{x_i\}$ を i を時間とみなし、時系列と考えて $c=0.26$ の場合のプロットしたものを、図4に示す。この図で不規則に現れる周期の大きな部分が、図2で狭い領域を通過しているため細かい振動を繰り返しているところであり、この状態が流体では層流状態に対応して

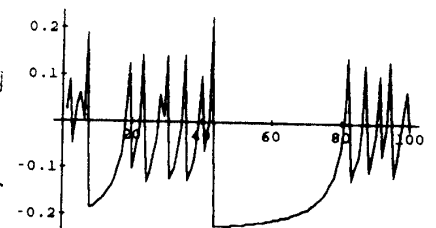


図4

いる。又不安定なリペラーのまわりを廻るのがバーストに対応している。

これまでの写像関数 $f(x)$ のリターンマップでは、不動点が突然無数に増える機構が理解しにくい。そこで周期2の写像関数 $f^2=f(f(x))$ に対する不動点 $x=f^2(x)$ を見るため、 $y=x$ と $y=f^2(x)$ を $c=0.25$ の場合に図5にプロットした。これら2線の交点が不動点であり、確かに周期2の不動点が増えていることが分かる。p 回繰り返した周期pの写像関数 $f^p(x)$ は $p \gg 1$ のときは激しく変化する。 $c=0.26$ の場合 $p=12$ とした写像関数 $y=f^{12}(x)$ と $y=x$ を図6にプロットした。この図から $p \gg 1$ の場合、 $x=f^p(x)$ から求まる不動点は非常に多くなることが理解される。図1で c が大きい領域では不動点の分布が2つの部分に分かれているが、この場合は、図7 ($c=0.7$) に示すように激しく変化する写像関数が2つの部分に分かれているためである。

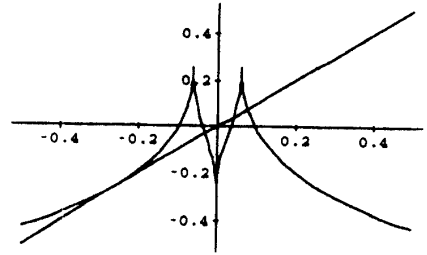


図5

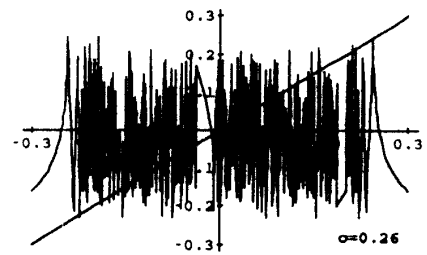


図6

3. カオスの判定法

図1では $c=0.25$ で不動点が無数に多くなって、カオス状態になったように見受けられるが、果たして本当のカオスなのか又は有限個の周期軌道なのか判別できない。リターンマップを多数繰り返し、軌道がある領域を埋め尽くすことによってカオス状態を調べることが出来るが、それは直感的にカオスを理解するひとつの考え方ではあるが手間がかかりあまり便利な方法と言えない。カオスの判定法には、軌道の安定法により調べる方法がある。最初近くにあった2つの軌道が時間 t とともにその距離がリアプーノフ数 σ として $\exp(\sigma t)$ のように変化するモデルで、もし $\sigma < 0$ ならば安定であり、 $\sigma > 0$ のときは軌道は不安定でこの時カオスになると考えられている。1次元マップの場合このリアプーノフ数は

$$\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|$$

のように定義されている。(1) 式のマップにこの σ をいろいろな c の値について計算したものを図8にプロットした。この図は $N=100$ としてFORTRANで計算したものである。図8からも明らかなるように $c < 0.25$ では $\sigma < 0$ で安定であり $0.25 < c < 0.75$ で $\sigma > 0$ に転じカオス状態になっていることを示しており、これは図

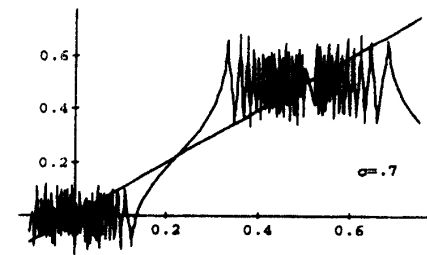


図7

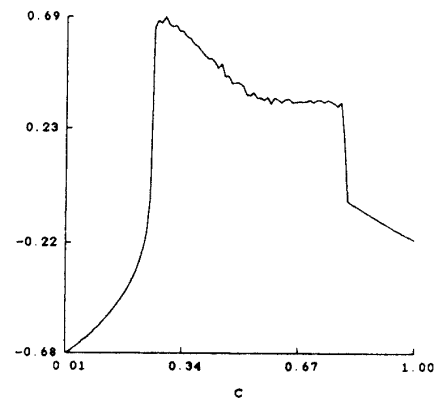


図8

1とよく対応していると考えられる。つまり図1で不動点が多数になった状態は、確かにカオス状態であることが図8のリアプーノフ数からも確かめられた。

振動系のカオス状態を調べるには、時系列データのフーリエ変換を行ない、その周波数のパワースペクトルをプロットする方法が古くから用いられている。この方法によると、周期軌道に対してはその固有周波数のところに鋭いピークを示し、カオス状態では周波数が全体に広がることで知ることができる。この方法は乱流実験などでデータの分析によく用いられている。ロジスチックマッピングの倍周期分岐過程が乱流実験で最初に確かめられたのも、このパワースペクトルの比較による。このパワースペクトルによる方法は手間がかかるが、実験と理論との比較には欠かせないので、(1)式の平方根マッピングに対しても適用した。

離散的な時系列 $\{x_j\}$ に対してフーリエ変換をすると次ぎの離散系列 $\{\bar{x}_k\}$ が生成される：

$$\bar{x}_k = \sum_{j=1}^n x_j \exp(-i \frac{2\pi j}{n} k)$$

このフーリエ変換の逆変換は次式で与えられる：

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \exp(i \frac{2\pi k}{n} j)$$

量 x_k は振動数 f の関数になるが、振動数 f も幅 Δf で離散的で $x_k = x(k \Delta f)$ と表される。ここで周期を T として $\Delta f = 1/T$ である。量 $|x_k|^2$ を周波数 $f(k \Delta f)$ の関数として表したものがパワースペクトルと呼ばれている。実際には、高速フーリエ変換法を用いてこの周波数パワースペクトルの計算をする。(1)式のマッピングで得られた時系列 $\{x_j\}$ の、FORTRAN で計算した、高速フーリエ変換によるパワースペクトル強度の対数値を図9、10にプロットした。

$c=0.8$ の場合、図9に見られるように、周波数0近くに一つのピークをもっており他の成分は非常に小さいので単振動系とみなせる。この場合は、図1ではカオス状態の端で単振動系に移したところと考えられる。 $c=0.4$ の場合は図10に見られるように、パワースペクトルは周波数全域に広がっており、典型的な乱流状態である。これは図1からも想像される。

参考文献

- 1) 山岸留次郎、福井工大紀要、No.24,p.245(1994).
- 2) Y.P.Pomeau and P.Manneville, Communications in Mathematical Physics, 74,189(1980).
- 3) W.H.Press, et al., Numerical Recipes, Cambridge University Press, Cambridge, p.390,1989.

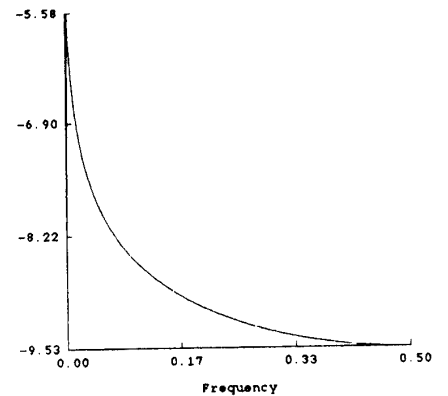


図 9

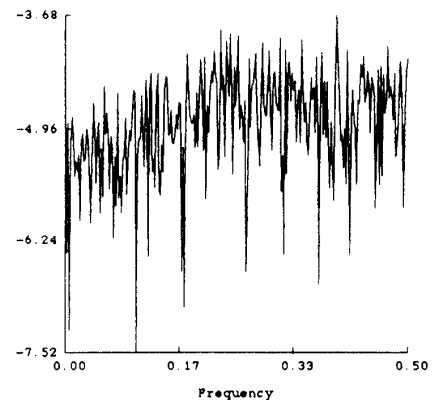


図 1 0

(平成6年12月13日受理)