

電気回路の過渡現象とシミュレーション

石 田 美 雄

Transient phenomena of electric circuit and its simulation

Yoshio ISHIDA

We studied that a set of differential equations which controls the transient phenomena of an electric circuit was solved by the personal computer and the results represented by graphs. In the case that the analytical solution can be obtained, the method is useful, because the graphical representation takes much time in most cases. In the case that the analytical solution can not be easily obtained in the complex circuit, the method becomes more useful. The personal computer used is N5200-05.

1. はじめに

物理法則は微分方程式で記述される場合が多いが、それをいろいろな条件のもとで解くことにより現象を解析することができる。しかし、多くの学生にとって微分方程式の解析的解法を理解することはできても、その物理的意味を理解するのは決して容易なことではないと思われる。ところが、パーソナル・コンピュータの飛躍的な発達によって、微分方程式を解いてその結果をディスプレイの上にグラフとして表示することが容易となった。平田¹⁾は教育上の立場から物理学の多くの分野について、BASICによるシミュレーション・プログラムを発表した。同様に須田・北原²⁾は電気・電子の分野について同じようなプログラムを発表している。しかし、これらの場合に使用されるパソコンはPC 9801系統のものなので、筆者の手許にあるN 5200-05とはそのグラフィック・コマンドが大きく異なっている。そこで筆者はN 5200の上で走るような物理、電気のシミュレーション・プログラムを開発した。特に電気回路の過渡現象については、やや系統的にプログラムの開発を行ない、解析解との誤差をも見えるようにしたので、ここに発表することとした。

2. 基礎的方法

1) オイラー法とルンゲ・クッタ法

1階の常微分方程式を解く方法としてはオイラー法とルンゲ・クッタ法がよく知られている。

オイラー法は微分方程式

$$\dot{y} = f(y, t) \dots\dots\dots (1)$$

が与えられたとき、 $t = t_{n+1}$ における関数値 $y = y_{n+1}$ は

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n, t_n) \Delta t \dots\dots\dots (2)$$

によって与えられる。

ルンゲ・クッタ法の場合は

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6} \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。ただし

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, t_n) \Delta t \\ k_2 &= f(y_n + k_1/2, t_n + \Delta t/2) \cdot \Delta t \\ k_3 &= f(y_n + k_2/2, t_n + \Delta t/2) \cdot \Delta t \\ k_4 &= f(y_n + k_3, t_n + \Delta t) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

である。

x と y との2つの関数についての二元連立微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t) \\ \dot{y} &= g(x, y, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

が与えられた時のオイラー法は

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + f(x_n, y_n, t_n) \cdot \Delta t \\ y_{n+1} &= y_n + g(x_n, y_n, t_n) \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となる。

ルンゲ・クッタ法では

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + k_1 \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。ここに k_1 と k_2 は

$$\begin{aligned} k_{11} &= f(x_n, y_n, t_n) \Delta t \\ k_{21} &= g(x_n, y_n, t_n) \Delta t \\ k_{12} &= f(x_n + k_{11}/2, y_n + k_{21}/2, t_n + \Delta t/2) \cdot \Delta t \\ k_{22} &= g(x_n + k_{11}/2, y_n + k_{21}/2, t_n + \Delta t/2) \cdot \Delta t \\ k_{13} &= f(x_n + k_{12}/2, y_n + k_{22}/2, t_n + \Delta t/2) \cdot \Delta t \\ k_{23} &= g(x_n + k_{12}/2, y_n + k_{22}/2, t_n + \Delta t/2) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$k_{14} = f(x_n + k_{13}, y_n + k_{23}, t_n + \Delta t) \cdot \Delta t$$

$$k_{24} = g(x_n + k_{13}, y_n + k_{23}, t_n + \Delta t) \cdot \Delta t$$

を用いて

$$k_1 = (k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14})/6$$

$$k_2 = (k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24})/6$$

のように与えられる。

2) 描画の方法

関数の初期値が与えられた時、 Δt 時間後の関数の値は以上の諸式によって求められる。したがって、N5200における@PENMOV文と@DRAW文を用いることによって連続的にグラフを描くことができる。

@PENMOV X, Y

というコマンドはペンを(X, Y)という点に持って行く命令であり、

@DRAW X, Y

というコマンドは、現在のペン位置から(X, Y)まで直線を引く命令である。したがって、@PENMOV文によりペンを初期値に持って行き、その後で、@DRAW文をFOR~NEXT文でかこむか、もしくはIF~THEN, GOTO文によって必要なだけ繰返せばよい。

3) 座 標 軸

N5200-05のグラフを描画するメモリー—映像メモリーという—は一辺が1024ドットの正方形であるが、ディスプレイのグラフ画面は640×456ドットの矩形である。この範囲内にグラフを描かせることにして、座標軸としては左下隅に原点を持つLDAXISと左中央に原点を持つLMAXISの2種類を用意した。LDAXISでは縦軸、横軸共に50ドットごとに小さい区切りを入れ、LMAXISでは40ドットごとに小さい区切りを入れた。横軸は時間軸として使用し、縦軸は電流もしくは電圧軸として使用した。

各軸における1区切り(50ドットもしくは40ドット)をいくら(何秒, 何アンペアもしくは何ボルト)として使用するかを定める為にスケール・ファクターST, SI, SVを用意する。例えばSTについては

$$ST = 50 \text{ 又は } 40 / (1 \text{ 区切りに対応する時間})$$

である。従ってSTは単位時間をグラフ上の何ドットで表示するかを示す。

座標軸を描くプログラムはA形式でSAVEして、いつでもサブルーチンとして利用できるようにした。

3. RL直列回路の過渡現象のシミュレーションとその誤差

ここではRL直列回路を支配する微分方程式をオイラー法及びルンゲ・クッタ法で解いた結果

を図示すると同時に、その解析解がわかっているのので、各場合の誤差をも図示した。

図-1に示すようなRL直列回路を支配する微分方程式は

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \dots\dots\dots (7)$$

であり、その解析値は

$$i_A = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \dots\dots\dots (8)$$

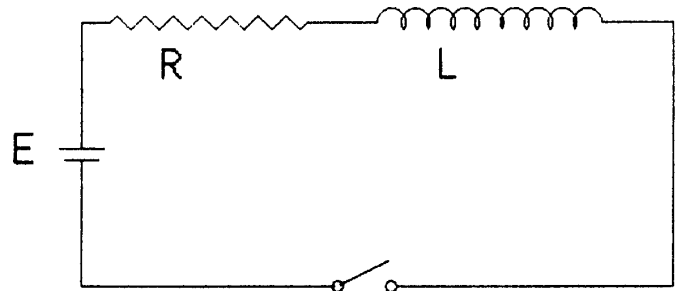


図-1 RL直列回路

である。式(7)をオイラー法で解いて、 $i-t$ 曲線を表示し、同時にその解と解析解 i_A との差の絶対値

$$i_{ERR} = |i - i_A| \times 10$$

を求めて、 $i_{ERR}-t$ 曲線をも表示するプログラムの一部を、図-2に示した。

```

110 REM R L 直列回路の過渡特性とオイラー法の誤差
120 INPUT "R=";R:INPUT "L=";L:INPUT "E=";E
130 INPUT "I0=";I0:INPUT "DT=";DT:INPUT "Tノオワリ";TE
140 INPUT "Tノスケール";ST:INPUT "Iノスケール";SI
150 N=INT(TE/DT)
160 GOSUB *LDAXIS
170 @PENMOV 0,I0:I=I0
180 FOR J=1 TO N
190 I=I+(E-I*R)/L*DT
200 @DRAW J*DT*ST,I*SI
210 NEXT J
220 @PENMOV 0,I0:I=I0
230 FOR J=1 TO N
240 I=I+(E-I*R)/L*DT
250 IA=E/R*(1-EXP(-R/L*J*DT))
260 IERR=ABS(I-IA)*10
270 @DRAW J*DT*ST,IERR*SI
280 NEXT J
    
```

図-2 RL直列回路の過渡特性とオイラー法の誤差を求めるプログラム(一部)

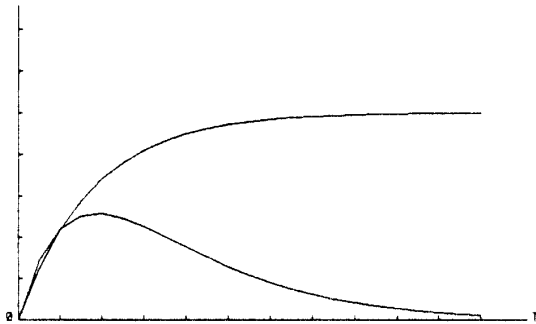
ここで、

$$190 \quad I = I + (E - I * R) / L * DT$$

という式が(2)式に対応している。このプログラムを走らせたものが図-3、図-4である。

縦軸は電流で1目盛が0.2Aとなっている。DT=.05秒のときは最大誤差は0.2秒のところで起り、誤差率は7%である。DT=.01秒のときは最大誤差は.15秒のところで起り、誤差率は2%である。

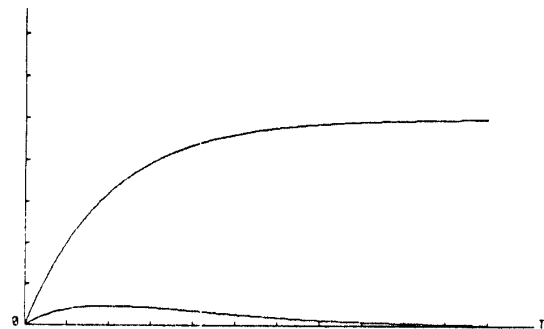
RL直列回路の過渡特性と
オイラー法の誤差



R= 5 オーム, L= 1 ヘンリー
E= 5 ボルト
ST= 500 SI= 250 DT= .05 秒
時間の一目盛 .1 秒
電流の一目盛 .2 アンペア

図-3 オイラー法 (誤差曲線の倍率 10)

RL直列回路の過渡特性と
オイラー法の誤差



R= 5 オーム, L= 1 ヘンリー
E= 5 ボルト
ST= 500 SI= 250 DT= .01 秒
時間の一目盛 .1 秒
電流の一目盛 .2 アンペア

図-4 オイラー法 (誤差曲線の倍率 10)

比較の為に式(7)をルンゲ・クッタ法で解くプログラムの一部を図-6に示した。このプログラムを前と同じデータでDT=.05秒として走らせたものが図-6である。

```

110 REM RL直列回路の過渡特性とルンゲ・クッタ法の誤差
120 DEF FNI(I)=(E-R*I)/L
130 INPUT "R=":R:INPUT "L=":L:INPUT "E=":E
140 INPUT "I0=":I0:INPUT "DT=":DT:INPUT "Tノオフリ":TE
150 INPUT "Tノスケール":ST:INPUT "Iノスケール":SI
160 N=INT(TE/DT)
170 GOSUB *LDAXIS
180 @PENMOV 0,I0:I=I0
190 FOR J=1 TO N
200 GOSUB 380
210 I=I+K
220 @DRAW J*DT*ST,I*SI
230 NEXT J
240 @PENMOV 0,I0:I=I0
250 FOR J=1 TO N
260 GOSUB 380
270 I=I+K
280 IA=E/R*(1-EXP(-R/L*J*DT))
290 IERR=1000*ABS(I-IA)
300 @DRAW J*DT*ST,IERR*SI
310 NEXT J

380 K1=FNI(I)*DT
390 K2=FNI(I+K1/2)*DT
400 K3=FNI(I+K2/2)*DT
410 K4=FNI(I+K3)*DT
420 K=(K1+2*(K2+K3)+K4)/6
430 RETURN
    
```

図-5 RL直列回路の過渡特性とルンゲ・クッタ法の誤差を求めるプログラム (一部)

この場合は

$$i_{ERR} = |i - i_A| \times 1000$$

としてあるにも拘らず、オイラー法の図-4と同じ程度の誤差がやっと認められた。これから見て、ルンゲ・クッタ法はオイラー法に比べて相当正確にシミュレーションを行なうことを示している。

4. RLC 直列回路の過渡現象のシミュレーションとその誤差

図-7に示すようなRLC直列回路において、スイッチSWを閉じた後の電圧方程式は

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \dots\dots\dots (9)$$

となる。これを電荷*q*を用いて書き直すと

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E \dots\dots\dots (10)$$

となる。この式の一般解は

$$q = CE + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \dots\dots\dots (11)$$

$$i = S_1 A_1 e^{s_1 t} + S_2 A_2 e^{s_2 t} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。ここに

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ S_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

であり、*A*₁、*A*₂は積分常数である。

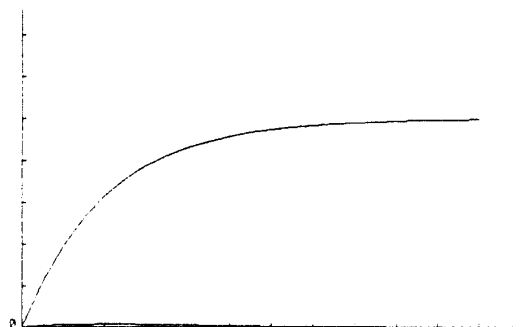
ここで、次の3つの場合が生ずる。

1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ の場合

$$q = CE \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \sinh \gamma t + \cosh \gamma t \right) \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$i = CE \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha} e^{-\alpha t} \sinh \gamma t \dots\dots\dots (14)$$

RL直列回路の過渡特性とルンゲ・クッタ法の誤差



R= 5 オーム、L= 1 ヘンリー
E= 5 ボルト
ST= 500 SI= 250 DT= .05 秒
時間の一目盛 .1 秒
電流の一目盛 .2 アンペア

図-6 ルンゲ・クッタ法 (誤差曲線の倍率 1000)

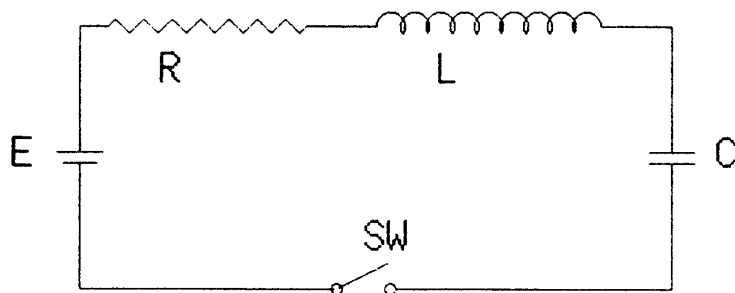


図-7 RLC 直列回路

ここに

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

2) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ の場合

$$q = CE\{1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}\} \dots\dots\dots (15)$$

$$i = CE\alpha^2 e^{-\alpha t} \dots\dots\dots (16)$$

3) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ の場合

$$q = CE\{1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t\right)\} \dots\dots\dots (17)$$

$$i = CE \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t \dots\dots\dots (18)$$

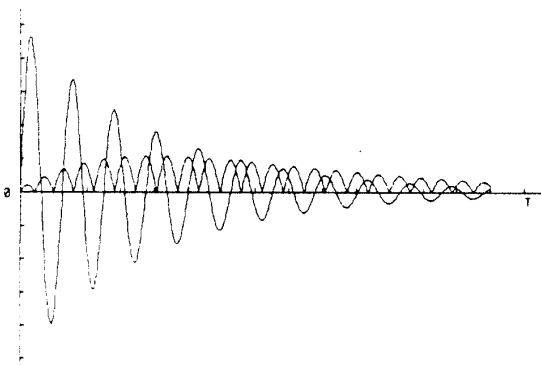
ここに, $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$

さて、パソコンによって(9)式の解を得るには、これを2個の1次の常微分方程式に分解する。Cのまわりの変動する電圧をvで表わすと $v = \int i dt$ であることを考慮して

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= (E - Ri - v)/L \\ \frac{dv}{dt} &= i/C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

を得る。この式をオイラー法で解き、そのi-t曲線を示すと共に、 $R < 2\sqrt{L/C}$ の場合の誤差曲線を図-8に示した。また、ルンゲ・クッタ法で解き、 $R < 2\sqrt{L/C}$ の場合の誤差曲線を図-9に示した。

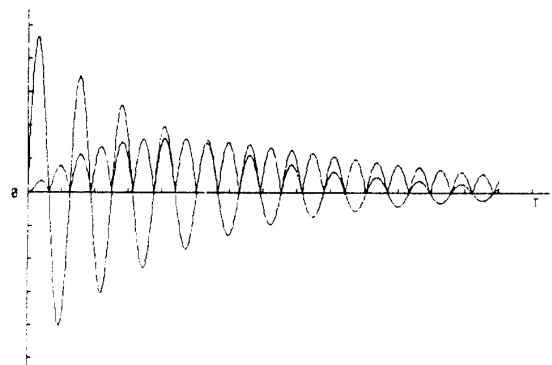
R L C 直列回路の電流過渡特性と
オイラー法の誤差



R= .1 オーム、L= .1 ヘンリー
C= .1 ファラッド、E= 5 ボルト
ST= 80 SI= 40 DT= .01 秒
時間の一目盛 .5 秒
電流の一目盛 1 アンペア

図-8 オイラー法 ($R < 2\sqrt{L/C}$)

R L C 直列回路の電流過渡特性と
ルンゲ・クッタ法の誤差



R= .1 オーム、L= .1 ヘンリー
C= .1 ファラッド、E= 5 ボルト
ST= 80 SI= 40 DT= .01 秒
時間の一目盛 .5 秒
電流の一目盛 1 アンペア

図-9 ルンゲ・クッタ法 ($R < 2\sqrt{L/C}$)

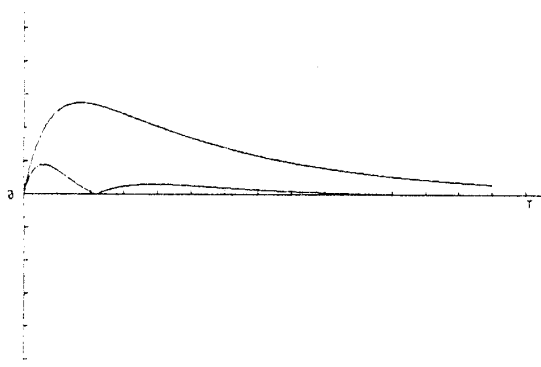
この場合は誤差電流 i_{ERR} は両方とも

$$I_{ERR} = ABS(I - I_A) * 10$$

としてある。誤差の絶対値はルンゲ・クッタの方がオイラーより少し大きい位である。しかし、ルンゲ・クッタの方は $i-t$ 曲線が t 軸を切る処で誤差が0であり、 $i-t$ 曲線が極大又は極小を示すところで誤差が大となっている。これは当然そうあるべきだと思われる。しかるに、オイラーの方を見ると、 $i-t$ 曲線と誤差曲線の位相がずれているのである。解が振動する場合には、位相の点でルンゲ・クッタ法が優れた点を示す。

それでは $R > 2\sqrt{L/C}$ の場合の誤差はどうなるであろうかと考えた。この場合の $i-t$ 曲線は一つの極大を持つなだらかな曲線である。オイラー法による誤差とルンゲ・クッタ法のそれを示す結果が図-10と図-11である。 i_{ERR} はオイラー法に対して50倍、ルンゲ・クッタ法に対しては1000倍にとってある。図から計算するとオイラー法で最大誤差が1%，ルンゲ・クッタ法で0.025%であり、ルンゲ・クッタ法の方が圧倒的に精度がよい。これは RL 曲線の場合と似ている。又、この場合の誤差曲線は2つの部分に分れており、間に誤差が0になる点が現われるのは興味深い。

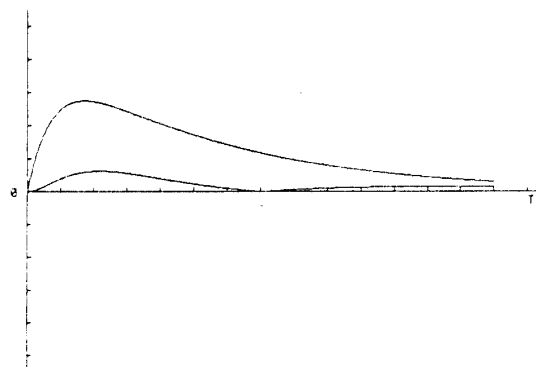
RLC直列回路の電流過渡特性と
オイラー法の誤差



R= 3 オーム、L= 1 ヘンリー
C= 1 ファラッド、E= 5 ボルト
ST= 80 SI= 80 DT= .01 秒
時間の一目盛 .5 秒
電流の一目盛 .5 アンペア

図-10 オイラー法 ($R > 2\sqrt{L/C}$)

RLC直列回路の電流過渡特性と
ルンゲ・クッタ法の誤差



R= 3 オーム、L= 1 ヘンリー
C= 1 ファラッド、E= 5 ボルト
ST= 80 SI= 80 DT= .01 秒
時間の一目盛 .5 秒
電流の一目盛 .5 アンペア

図-11 ルンゲ・クッタ法 ($R > 2\sqrt{L/C}$)

5. RLC直列回路の電流・電圧過渡特性

以上によってルンゲ・クッタ法はオイラー法にくらべて優秀であることがわかったので、以後はルンゲ・クッタ法を用いてRLC直列回路の電流過渡特性と電圧過渡特性を同時に表示するプログラムを作った。

今までのプログラムでは曲線の終る時間 TE を与えて、 $N = INT(TE/DT)$ により繰り返し回数を求め、FOR~NEXT文によって繰り返しを行なった。そしてスケール・ファクターは試行錯誤によって決めた。この為に余分の考慮を必要とした。今度のプログラムではデータが与えられると、スケール・ファクターが自動的に決定されるサブルーチンを付け加えた。原理は曲線

の極大点を WHILE~WEND 文を用いて求め、その値 X から、電流、電圧のスケール・ファクターを求めた。SI, SV については

$$SX = \text{INT} (40 / (X / 5))$$

として定め ($X = I$ 又は V)、時間のスケール・ファクター ST については

$$ST = \text{INT} (40 / X)$$

によって定めた。その部分プログラムを図-12に示す。

```

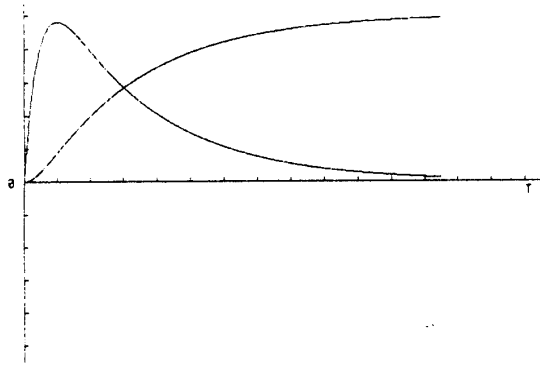
650 REM RUNGE-KUTTA
660 K11=FNI(I,V)*DT:K21=FNV(I)*DT
670 K12=FNI(I+K11/2,V+K21/2)*DT:K22=FNV(I+K11/2)*DT
680 K13=FNI(I+K12/2,V+K22/2)*DT:K23=FNV(I+K12/2)*DT
690 K14=FNI(I+K13,V+K23/2)*DT:K24=FNV(I+K13)*DT
700 K1=(K11+2*(K12+K13)+K14)/6:K2=(K21+2*(K22+K23)+K24)/6
710 RETURN
720 REM スケールファクターの自動決定
730 I=I0:V=V0:T=T0
740 GOSUB 650
750 I=I+K1:V=V+K2
760 I1=I
770 T=T+DT
780 GOSUB 650
790 I=I+K1:V=V+K2
800 I2=I
810 WHILE I2>I1
820 I1=I
830 T=T+DT
840 GOSUB 650
850 I=I+K1:V=V+K2
860 I2=I
870 WEND
880 SI=INT(40/(I2/5)):ST=INT(40/T)
890 I=I0:V=V0:T=T0
900 GOSUB 650
910 I=I+K1:V=V+K2
920 V1=V
930 T=T+DT
940 GOSUB 650
950 I=I+K1:V=V+K2
960 V2=V
970 WHILE V2>V1
980 V1=V
990 T=T+DT
1000 GOSUB 650
1010 I=I+K1:V=V+K2
1020 V2=V
1030 WEND
1040 SV=INT(40/(V2/5))
1050 RETURN

```

図-12 スケール・ファクターを自動決定するサブルーチン

自動決定によって大略の曲線を得ると、次には任意決定に切り換え、さらに好ましい曲線を得ることができる。このプログラムを $R > 2\sqrt{L/C}$, $R = 2\sqrt{L/C}$ および $R < 2\sqrt{L/C}$ の条件で走らせた結果が図-13, 図-14及び図-15である。

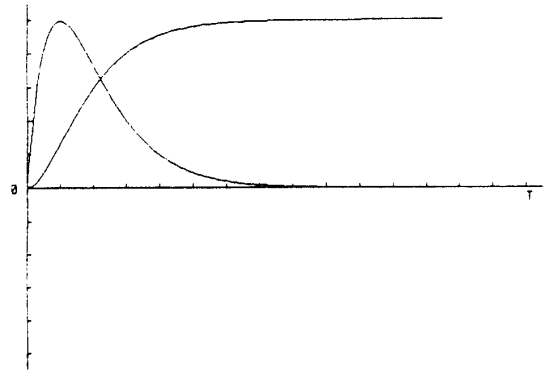
R L C 直列回路の電流電圧過渡特性



R= 3 オーム、L= 1 ヘンリー
 C= 1 ファラッド、E= 50 ボルト
 ST= 46 SI= 14 SV= 4 DT= .01 秒
 時間の一目盛 .869565 秒
 電流の一目盛 2.85714 アンペア
 電圧の一目盛 10 ボルト

図-13 $R > 2\sqrt{L/C}$ の場合

R L C 直列回路の電流電圧過渡特性



R= 2 オーム、L= .1 ヘンリー
 C= .1 ファラッド、E= 5 ボルト
 ST= 400 SI= 108 SV= 40 DT= .01 秒
 時間の一目盛 .1 秒
 電流の一目盛 .37037 アンペア
 電圧の一目盛 1 ボルト

図-14 $R = 2\sqrt{L/C}$ の場合

いずれもスケール・ファクターは自動決定で描かせたものであるから、時間、電流、電圧の一目盛の値は見やすい値になっていない。しかし、 R 、 L 、 C 、 E の値を入力しさえすれば、ただちに過渡特性曲線が得られるので、非常に便利である。

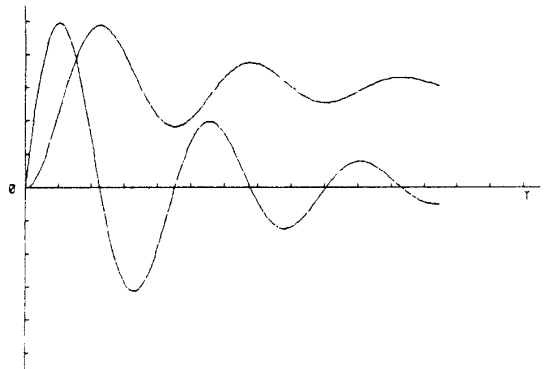
6. ま と め

電気回路の過渡現象を支配する微分方程式をパソコンによって解く場合にオイラー法とルンゲ・クッタ法がある。二つの方法について、その誤差曲線を比較して次のことがわかった。

- 1) 解が振動しない場合にはルンゲ・クッタ法の誤差はオイラー法の誤差の1/50程度となる。
- 2) 解が振動する場合は誤差の絶対値はほぼ等しいが、ルンゲ・クッタ法は位相特性が優れている。

それでルンゲ・クッタ法はプログラムが少し長くなるけれども、この方を使用すべきである。

R L C 直列回路の電流電圧過渡特性



R= .3 オーム、L= .1 ヘンリー
 C= .1 ファラッド、E= 5 ボルト
 ST= 285 SI= 49 SV= 24 DT= .01 秒
 時間の一目盛 .140351 秒
 電流の一目盛 .816327 アンペア
 電圧の一目盛 1.66667 ボルト

図-15 $R < 2\sqrt{L/C}$ の場合

参 考 文 献

- 1) 平田邦男著：BASICによる物理
共立出版（1983年）
- 2) 須田健二・北原紀之著：BASICによる電気・電子
共立出版（1985年）
- 3) 松坂知行著：パソコンによる動的システムとシミュレーション
工学図書（1986年）