

# 位置と速度が測定されるレーダの追尾精度

鈴 木 力

## Tracking Accuracy of Radar with Position and Velocity Measurements

Chikara SUZUKI

Predicted position accuracy of scanning radar with position and velocity measurements is computed. The accuracy becomes better than that with position measurements only. The improved effect is step function type. It is improved abruptly when velocity measurements error becomes smaller than the value which is determined by position measurements error.

### 1. ま え が き

搜索レーダ (Scanning Radar) では、内蔵されているコンピュータに、反射信号のデータを入力し、目標の航跡を計算することによって追尾を行う。このコンピュータのアルゴリズムには、カルマンフィルターが用いられる。

レーダが、目標の位置と速度を測定できる場合のカルマンフィルター方程式とその定常解については、既に研究が発表されているが<sup>1, 2, 3, 4)</sup> 計算式が複雑なために、追尾精度に対する測定値相互の影響は明確でない。

筆者は、速度データが推定位置精度に及ぼす効果を検討した結果、速度データが、レーダの推定位置精度の改善に貢献するためには、速度測定誤差が、位置測定誤差で定まるある値以下でなければならないこと、また、位置測定誤差が大きいほど、速度データによる推定位置精度の改善効果が大きいことを明かにした。

### 2. カルマンフィルター方程式

搜索レーダの場合には、信号過程と観測過程は次式で与えられる。

信号過程

$$X(n+1) = \phi X(n) + W(n) \quad (1)$$

観測過程

$$Z(n+1) = HX(n+1) + V(n+1) \quad (2)$$

状態変数が、位置と速度の場合には、上式の記号は次のようになる。

状態ベクトル

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$X_1$ : 位置

$X_2$ : 速度

遷移行列

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$T$ : 測定間隔

観測ベクトル

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$Z_1$ : 位置の測定値

$Z_2$ : 速度の測定値

観測行列

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$W(n)$ ,  $V(n)$  は、加速度の外乱と、観測雑音で、その共分散行列は次式で与えられる。

$$Q = E\{W(n)W(n)^T\} = \sigma_a^2 T^2 \begin{bmatrix} T^2/3 & T/2 \\ T/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$R = E\{V(n)V(n)^T\} = \begin{bmatrix} \sigma_o^2 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\sigma_o^2$ : 位置測定誤差の分散

$\sigma_d^2$ : 速度測定誤差の分散

$\sigma_a^2$ : 外乱加速度の分散

このシステムに対するカルマンフィルターアルゴリズムの推定共分散行列  $\hat{P}(n)$ , 更新共分散行列  $\tilde{P}(n)$ , 利得  $K(n)$  は、次式で与えられる。

$$\tilde{P}(n+1) = \phi \hat{P}(n) \phi^T + Q \quad (9)$$

$$\hat{P}^{-1}(n) = \tilde{P}^{-1}(n) + H^T R^{-1} H \quad (10)$$

$$K(n) = \hat{P}(n) H^T R^{-1} \quad (11)$$

### 3. 定常解

定常解の共分散行列の要素を次のように定める。

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_2 & \tilde{P}_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 & \hat{P}_2 \\ \hat{P}_2 & \hat{P}_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$\tilde{P}_1$  : 推定位置誤差の分散

$\tilde{P}_3$  : 推定速度誤差の分散

$\hat{P}_1$  : 更新位置誤差の分散

$\hat{P}_3$  : 更新速度誤差の分散

また、パラメータ

$$r = 4\sigma_o/\sigma_a T^2 \quad (14)$$

$$A = (4/r)^2 \quad (14a)$$

$$S = \sigma_a T/\sigma_o \quad (15)$$

を定義する。 $r$ は $\sigma_a T^2/4$ で正規化された位置測定誤差、 $S$ は $\sigma_o/T$ で正規化された速度測定誤差である。

このフィルターの定常解は、 $r(A)$ と $S$ の関数として次のように表わされる。<sup>2)</sup>

$$\tilde{P}_1/\sigma_o^2 = \{2KS^4X + Q_1(A/2 - X)\}/(S^2Q_2) \quad (16a)$$

$$\tilde{P}_2/(\sigma_o^2/T) = Q_1/(2KS^2) \quad (16b)$$

$$\tilde{P}_3/(\sigma_o^2/T^2) = X + A/2 \quad (16c)$$

ここに

$$X = \sqrt{\frac{-P_2 + \sqrt{P_2^2 - 4P_1P_3}}{2P_1}} \quad (17a)$$

$$Q_1 = BX^2 + S^2KX + C \quad (17b)$$

$$Q_2 = BX^2 - S^2KX + C \quad (17c)$$

$$P_1 = B^2 \quad (17d)$$

$$P_2 = 2BC - S^2K^2(S^2 - 4) \quad (17e)$$

$$P_3 = C^2 - 4S^2K^3 \quad (17f)$$

$$K = A(S^2 + A/4) \quad (17g)$$

$$C = AK(1 + S^2/6) \quad (17h)$$

また、利得マトリックスの要素を、

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

と定めると、各要素は、次式で与えられる。

$$K_{11} = \{2KS^4X - Q_2(A/2 + X)\}/(S^2Q_1) \quad (18a)$$

$$K_{12} = TQ_2/(2KS^4) \quad (18b)$$

$$K_{21} = Q_2/(2KTS^2) \quad (18c)$$

$$K_{22} = (X - A/2)/S^2 \quad (18d)$$

更新共分散行列の各要素は次式で与えられる。

$$\hat{P}_1/\sigma_o^2 = K_{11} \quad (19a)$$

$$\hat{P}_2/(\sigma_o^2/T) = Q_2/(2KS^2) \quad (19b)$$

$$\hat{P}_3/(\sigma_o^2/T^2) = X-A/2 \quad (19c)$$

4. 推定位置誤差に関する考察

前節で述べたように、位置と速度が測定される場合のカルマンフィルターの定常解は、正規化された位置測定誤差  $r(A)$  と、正規化された速度測定誤差  $S$  の関数として表わされるが、計算式が複雑なために、追尾精度に対する位置と速度の測定誤差の影響は明確でない。本論文では、推定位置誤差  $\tilde{P}_1$  についてのみ考察を行なう。

推定位置誤差  $\tilde{P}_1$  を  $\sigma_o^2$  で正規化した値、 $G_1 = \tilde{P}_1/\sigma_o^2$  を、 $r$  をパラメータとして  $S$  に対して計算すると図-1 のようになる。

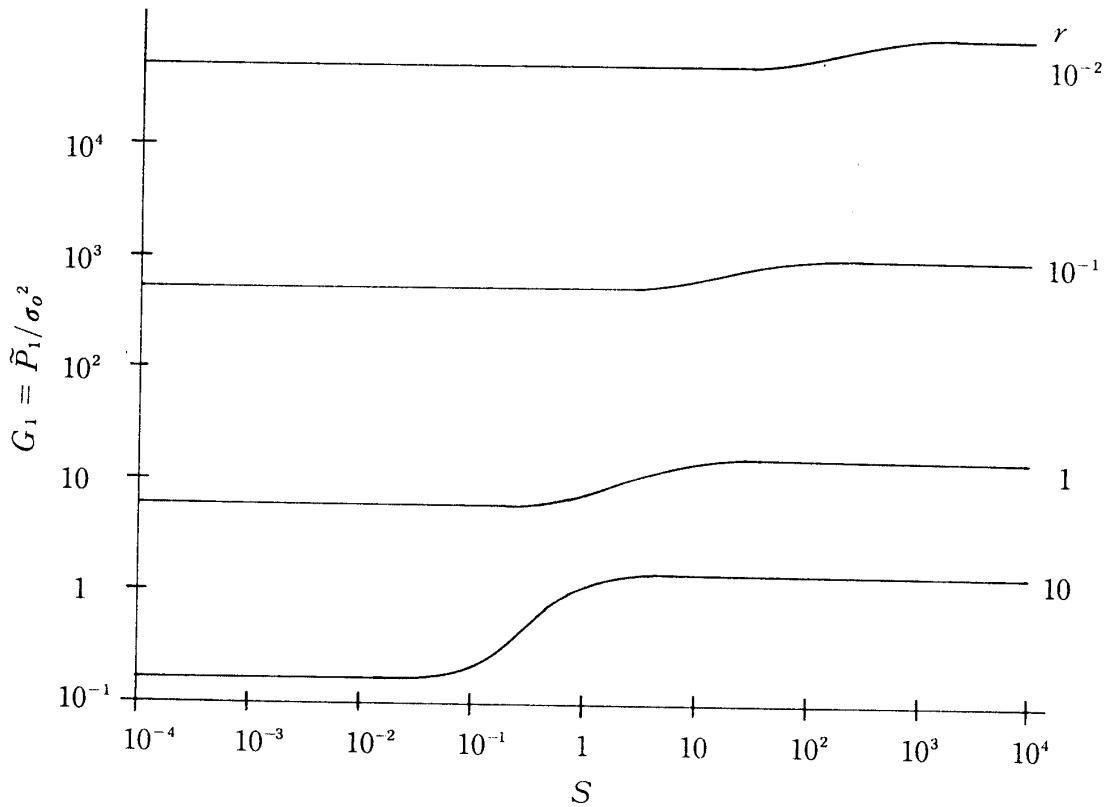


図-1 速度測定誤差  $S = \sigma_d T / \sigma_o$  と推定位置誤差  $G_1 = \tilde{P}_1 / \sigma_o^2$  の関係  
 パラメータ：位置測定誤差  $r = 4\sigma_o / \sigma_d T^2$

速度の測定精度を向上させると、すなわち  $S$  の値を小さくしてゆくと、推定位置誤差  $G_1$  は、パラメータ  $r$  で定まるある  $S$  の値までは変化しないが、その値より精度が向上すると、飛躍的に  $G_1$  は小さくなり、それ以後はまた一定値を維持する。速度測定誤差の推定位置精度向上に対する効果は、段階的で、 $r$  で定まる一定値より速度測定誤差が小さくなければ、速度データは、推定位置精度向上に役立たない。また、その一定値より速度測定誤差を小さくしても、推定位置誤差は一定値を維持し、推定位置精度がさらに向上するということはない。

推定位置誤差  $G_1$  の  $S \rightarrow \infty$  および、 $S \rightarrow 0$  の極限値を、 $r$  の関数として求めると次のようになる。

$$G_1|_{s=\infty} = \tilde{P}_1/\sigma_o^2|_{s=\infty} = \frac{4\left\{\frac{2}{3} + \sqrt{r^2 + \frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} \left[ \left\{\left(\frac{2}{3} + \sqrt{r^2 + \frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^2 - \frac{1}{6}\right]}{\sqrt{2} r^2} \quad (20)$$

$$G_1|_{s=0} = \tilde{P}_1/\sigma_o^2|_{s=0} = -1 + \frac{4}{r^2} \frac{\frac{3}{2} r^2}{\sqrt{3r^2+1} - \left(\frac{3}{2} r^2 + 1\right)} \quad (21)$$

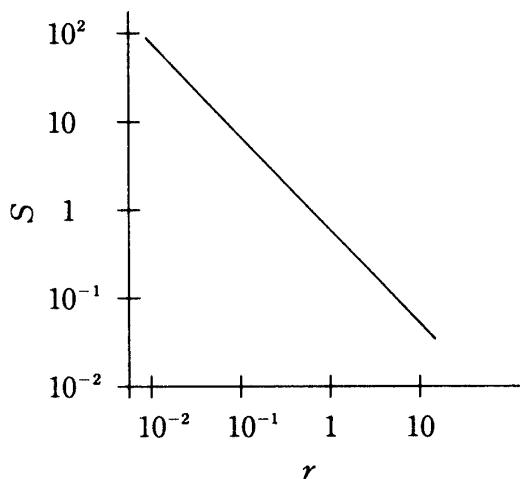


図-2 推定位置誤差  $G_1 = \tilde{P}_1/\sigma_o^2$  が、 $G_1|_{s=0}$  の1.1倍となる位置測定誤差  $r = 4\sigma_o/\sigma_a T^2$  と速度測定誤差  $S = \sigma_a T/\sigma_o$  の関係

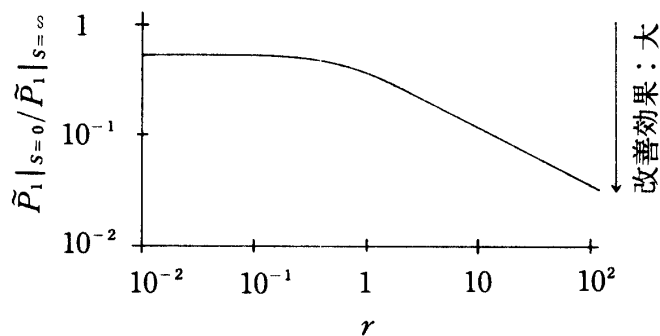


図-3 推定位置誤差  $\tilde{P}_1$  の改善効果

推定位置精度が段階的に向上する  $r$  に対する  $S$  を求めるために、 $G_1$  が  $G_1|_{s=0}$  の1.1倍となる  $r$  に対する  $S$  を求めると、図-2 のようになる。すなわち、図に示した  $r$  に対応する  $S$  より速度測定誤差を小さくすれば、推定位置精度は改善される。

次に、位置推定精度の改善効果を示す量として、 $\tilde{P}_1|_{s=0}/\tilde{P}_1|_{s=\infty}$  を  $r$  の関数として計算した結果を図-3に示す。 $r$  が大きいほど、すなわち位置測定誤差が大きいほど、速度データの推定位置精度改善に対する効果が大きいことを示している。 $r$  が小さい場合には、 $\tilde{P}_1|_{s=0}/\tilde{P}_1|_{s=\infty}$  は、0.536 ( $\tilde{P}_1$  が約50%改善される) に収束する。

## 5. 結 論

位置と速度が測定されるレーダの追尾精度を表わす要素の中で、推定位置誤差について考察した結果次の結論が得られた。

- (1) 速度測定誤差が、位置測定誤差で定まるある値より小さくなければ、速度データは、推定位置精度の向上に貢献しない。
- (2) 速度測定誤差が、上述の値より小さければ、速度データの推定位置精度向上に対する効果は一定で、速度測定誤差が小さいほど、推定位置精度が向上するということはない。
- (3) 位置測定誤差が大きいほど、速度データの推定位置精度改善に対する効果は大きい。

### 付録 カルマンフィルターのアルゴリズム

信号過程 (Dynamics)

$$X(n+1) = \phi X(n) + W(n) \quad (\text{A } 1)$$

観測過程 (Observation)

$$Z(n+1) = HX(n+1) + V(n+1) \quad (\text{A } 2)$$

初期値 (Initiation)

$$\hat{X}(0) = Z(0) \quad (\text{A } 3)$$

推定値 (Prediction)

$$\tilde{X}(n+1) = \phi \hat{X}(n) \quad (\text{A } 4 \text{ a})$$

推定共分散 (Predicted Covariance)

$$\tilde{P}(n+1) = \phi \hat{P}(n) \phi^T + Q \quad (\text{A } 4 \text{ b})$$

利得行列 (Gain Matrix)

$$K(n+1) = \tilde{P}(n+1) H^T [H \tilde{P}(n+1) H^T + R(n+1)]^{-1} \quad (\text{A } 5)$$

更新値 (Update)

$$\hat{X}(n+1) = \tilde{X}(n+1) + K(n+1)[Z(n+1) - H \tilde{X}(n+1)] \quad (\text{A } 6 \text{ a})$$

更新共分散 (Updated Covariance)

$$\hat{P}(n+1) = [I - K(n+1)H] \tilde{P}(n+1) \quad (\text{A } 6 \text{ b})$$

(A 4) に続く

### 謝辞

本研究の計算に関し、助言をいただいた本学電子計算機室・助教授・加藤芳信氏、同室員・石井信彦氏、清水英行氏の諸氏に感謝する。

### 参考文献

- 1) F. R. CASTERRA: Tracking Accuracies with Position and Rate Measurements. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol.AES-17, p433-437, May, 1981.
- 2) K. V. RAMACHANDRA: Analytical Results for a Kalman Tracker Using Position and Rate Measurements. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol.AES-19, p776-778, September, 1983.

- 3) B. EKSTRAND: Analytical Steady State Solution for a Kalman Tracking Filter.  
IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol.AES-19, p815-819, November, 1983.
- 4) K. V. RAMACHANDRA: Identical Steady State Results for a Kalman Tracker.  
IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol.AES-23, p129-130, January, 1987.