生産性の国際比較の理論的背景

前　多　康　男

I　はじめに

この小論は、生産性の国際比較を行なう際に理論的な基礎となるいくつかの論文を、系統だって紹介することを目的としたものである。ディビジア指数やTranslog 型生産関数は、色々な目的で実際に使用されているが、ここでもう一度その理論的背景を整理してみることも重要である。

II　全要素生産性

Jorgenson and Griliches (1967) に沿って全要素生産性の定義を概観してみることとする。社会会計のシステムより Y_i を第 i 生産物の生産量、q_i を第 i 生産物の価格、X_j を第 j 生産要素の投入量、p_j を第 j 生産要素の価格とすれば

$$q_1Y_1+q_2Y_2+\cdots+q_mY_m=p_1X_1+p_2X_2+\cdots+p_nX_n \tag{1}$$

が成り立つ。この式を時間について全微分し、もう一度（1）式の両辺で割ることによって

$$\sum_i w_i\left[\frac{\dot{q}_i}{q_i}+\frac{\dot{Y}_i}{Y_i}\right]=\sum_j v_j\left[\frac{\dot{p}_j}{p_j}+\frac{\dot{X}_j}{X_j}\right] \tag{2}$$

但し

$$w_i=\frac{q_iY_i}{\sum_i q_iY_i},$$

$$v_i = \frac{p_j X_j}{\sum_j p_j X_j}$$

を得る。生産物の総生産量の指数 Y の成長率を

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \sum_i w_i \frac{\dot{Y}_i}{Y_i},$$

生産要素の総投入量の指数 X の成長率を

$$\frac{\dot{X}}{X} = \sum_j v_j \frac{\dot{X}_j}{X_j}$$

で定義する。同様に生産物の価格の指数 q の成長率を

$$\frac{\dot{q}}{q} = \sum_i w_i \frac{\dot{q}_i}{q_i},$$

生産要素の価格の指数 p の成長率を

$$\frac{\dot{p}}{p} = \sum_j v_j \frac{\dot{p}_j}{p_j}$$

で定義する。最初の 2 つの指数はディビジア数量指数、後の 2 つの指数はディビジア価格指数と呼ばれている。全要素生産性 P を

$$P = \frac{Y}{X} \tag{3}$$

で定義する。従って全要素生産性 P の成長率は

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X} = \sum_i w_i \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} - \sum_j v_j \frac{\dot{X}_j}{X_j} \tag{4}$$

または

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{p}}{p} - \frac{\dot{q}}{q} = \sum_j v_j \frac{\dot{p}_j}{p_j} - \sum_i w_i \frac{\dot{q}_i}{q_i} \tag{5}$$

で計算できる。この指数は、ディビジア全要素生産性指数の成長率と呼ばれているが、新古典派経済学の生産者均衡の立場から理解することができることを以下に示す。

生産関数を陰関数の形で

$$F(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, -X_1, -X_2, \cdots, -X_n) = 0 \tag{6}$$

と定義できるものとし、ここでこの関数の一次同次性を仮定する。Fを全微分し

$$\dot{F} = \sum_i F_i \dot{Y}_i - \sum_j F_j \dot{X}_j \tag{7}$$

を得る。但し

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial Y_i},$$

$$F_j = \frac{\partial F}{\partial X_j}.$$

Fの一次同次性よりオイラーの定理を適用して、

$$\sum_i F_i Y_i - \sum_j F_j X_j = 0$$

を得るので、Qを

$$Q = \sum_i F_i Y_i = \sum_j F_j X_j$$

で定義すれば（７）式は

$$\frac{\dot{F}}{Q} = \sum_i \left(\frac{F_i Y_i}{\sum_k F_k Y_k} \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} \right) - \sum_j \left(\frac{F_j X_j}{\sum_k F_k X_k} \frac{\dot{X}_j}{X_j} \right) \tag{8}$$

と変形できる。競争均衡を仮定すれば生産者は、

$$\text{maximize } \sum_i q_i Y_i - \sum_j p_j X_j$$

$$\text{subject to } F(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, -X_1, -X_2, \cdots, -X_m) = 0$$

を解いているとされる。従ってλをラグランジュ乗数として

$$q_i = \lambda F_i,$$

$$p_i = \lambda F_j$$

を得る。これらの式と(8)式を用いて

$$\frac{\dot{F}}{Q} = \frac{\dot{P}}{P} \tag{9}$$

を導出できる。この式は、生産関数のシフトとディビジア全要素生産性指数の成長率が対応していることを示している。

III　ディビジア指数とTranslog型生産関数

以下Diewert (1976) に沿ってディビジア指数が、Translog型生産関数と斉合的であることを示す。

0期と1期の間の数量指数を

$$Q\,(p\,(0), p\,(1); x\,(0), x\,(1))$$

で表現し、対応する価格指数を

$$P\,(p\,(0), p\,(1); x\,(0), x\,(1))$$

で表現すると、どのような指数であっても

$$P\,(p(0), p(1); x(0), x(1))\,Q\,(p(0), p(1); x(0), x(1)) = \frac{p(1)\,x(1)}{p(0)\,x(0)}$$

を満たしていなければならない。Christensen, Jorgenson and Lau (1971, 1973) で紹介された一次同次のTranslog型集計関数は

$$\ln f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \ln x_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{jk} \ln x_j \ln x_k$$

で定義される。ここで

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n = 1\,,$$

$$\gamma_{jk} = \gamma_{kj}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \gamma_{jk} = 0$$

であり、この関数は任意の二階連続微分可能な一次同次の関数の2階の近似になっている。gを2次形式の関数

$$g(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n z_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{jk} z_j z_k$$

とすると、2次形式近似レンマ（Diewert (1976, p.116) 参照）を用いて

$$g(z(1))-g(z(0))=\frac{1}{2}[\nabla g(z(1))+\nabla g(z(0))](z(1)-z(0))$$

が成り立つ。このレンマを $\ln f$ に適用して

$$\ln f(x(1))-\ln f(x(0))=\frac{1}{2}\left[\hat{x}(1)\frac{\nabla f(x(1))}{f(x(1))}\right]+\left[\hat{x}(0)\frac{\nabla f(x(0))}{f(x(0))}\right](\ln x(1)-\ln x(0))$$

を得る。(ここで $\hat{x}(1)$ と $\hat{x}(0)$ はベクターを対角行列に変換したもの。) f を一次同次の Tranlog 型集型関数として

$$\max_{x}\{f(x):\ p(r)x=p(r)x(r);\ x\geq o\}$$

の解が $x(r)$ で与えられるとすると、r が 1 の場合と 0 の場合を考えて、

$$\ln f(x(1))-\ln f(x(0))=\frac{1}{2}\left[\frac{\hat{x}(1)p(1)}{p(1)^{T}x(1)}+\frac{\hat{x}(0)p(0)}{p(0)^{T}x(0)}\right](\ln x(1)-\ln x(0))$$

を得る。(Diewert (1976, p.119) 参照。) この Tranlog 型生産関数と斉合的である指数は、ディビジア離散型近似指数と呼ばれる。Diewert は(1)経済の生産可能性集合が生産物集計関数と投入物集計関数が共に Translog 型集計関数である形に分離可能であり、(2)生産者が利潤の最大化を行なっており、(3)技術の進歩が中立的である場合には、Jorgenson and Griliches の全要素生産性指数の測定は正当化されることを示した。

離散型データでの全要素生産性指数の計算は例えば生産関数が、

$$Y(t)=f(K(t),L(t))$$

と、資本 K、労働 L の 2 要素である場合には

$$\ln P(t)-\ln P(t-1)=(\ln Y(t)-\ln Y(t-1))-\frac{1}{2}(v_L(t)+v_L(t-1))(\ln L(t)-\ln L(t-1))-\frac{1}{2}(v_K(t)+v_K(t-1))(\ln K(t)-\ln K(t-1))$$

と計算される。ここで $v_L(t)$ は t 期の労働への分配率、$v_K(t)$ は t 期の資本への分配率で、$p_L(t)$ を t 期の労働の価格、$p_K(t)$ を t 期の資本の価格として、それぞれ

$$v_L(t)=\frac{p_L(t)L(t)}{p_K(t)K(t)+p_L(t)L(t)},$$

$$v_K(t)=\frac{p_K(t)K(t)}{p_K(t)K(t)+p_L(t)L(t)}$$

で定義されているものとする。

Ⅳ　経済成長の比較分析

Jorgenson and Nishimizu (1978) は translog 型生産関数を用いて日本とアメリカの経済成長の比較分析を1952年から1974年までのデータにより行なった。その研究の目的は、日本とアメリカの生産高の差を生産要素投入量の差と技術のレベルの差で説明することであった。日本の生産高は1952年から1960年までの間アメリカ経済に比べて急速に増加していったが、資本の投入量はこの期間日本とアメリカであまり差は認められず、その要因を日本の急速な技術力の増加と労働力の投入に見ることができると分析している。1960年から1974年までの間は、労働力の投入量の平均成長率は日本とアメリカであまり差は認められないが、日本の資本の投入量の平均成長率はアメリカの２倍を超え、それに伴って技術のレベルも増加していったと分析しており、1968年から1973年の間に日本の技術力はアメリカの技術力に追い付いたとしている。

Jorgenson and Nishimizu はまず生産関数を以下のようにtranslog型で特定化した。

$$\begin{aligned}Y=\exp\Big[&\alpha_0+\alpha_K\ln K+\alpha_L\ln L+\alpha_D D+\alpha_T T+\\&\frac{1}{2}\beta_{KK}(\ln K)^2+\beta_{KL}\ln K\ln L+\beta_{KD}D\ln K+\beta_{KT}T\ln K+\\&\frac{1}{2}\beta_{LL}(\ln K)^2+\beta_{LD}D\ln L+\beta_{LT}T\ln L+\\&\frac{1}{2}\beta_{DD}D^2+\beta_{DT}DT+\frac{1}{2}\beta_{TT}T^2\Big]\end{aligned}$$

ここでYは生産高、Kは資本投入量、Lは労働投入量、Dはダミー変数（アメリカは１、日本は０）、Tは時間を表す。この関数は

$$\alpha_K + \alpha_L = 1\ ,$$
$$\beta_{KK} + \beta_{KL} = 0\ ,$$
$$\beta_{KL} + \beta_{LL} = 0\ ,$$
$$\beta_{KD} + \beta_{LD} = 0\ ,$$
$$\beta_{KT} + \beta_{LT} = 0$$

を必要十分条件として一次同次になる。資本の分配分 v_K と労働の分配分 v_L は、q_Y を生産物価格、p_K を資本投入の価格、p_L を労働投入の価格として、それぞれ

$$v_K = \frac{p_K K}{q_Y Y},$$

$$v_L = \frac{p_K L}{q_Y Y}$$

と定義される。

生産者均衡を仮定すると、資本の分配分 v_K と労働の分配分 v_L は、

$$v_K = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \alpha_K + \beta_{KK} \ln K + \beta_{KL} \ln L + \beta_{KD} \ln D + \beta_{KT} \ln T,$$

$$v_L = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \alpha_L + \beta_{KL} \ln K + \beta_{LL} \ln L + \beta_{LD} \ln D + \beta_{LT} \ln T$$

とそれぞれ計算できる。

生産 Y が Y_1 から Y_m までの m 個の要素で成り立っているとして、その集計関数として translog 型集計関数を使用すると、生産 Y は

$$Y = \exp\Big[\alpha_1 \ln Y_1 + \alpha_2 \ln Y_2 + \cdots + \alpha_m \ln Y_m +$$

$$\frac{1}{2}\beta_{11} (\ln Y_1)^2 + \beta_{12} \ln Y_1 \ln Y_2 + \cdots + \frac{1}{2}\beta_{mm} (\ln Y_m)^2\Big]$$

と計算できる。また第 i 生産物の価値のシェアー w_{Y_i} は、生産者均衡を仮定して

$$w_{Y_i} = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln Y_i} = \alpha_i + \beta_{1i} (\ln Y_1) + \cdots + \beta_{mi} (\ln Y_m)$$

と計算できる。

日本とアメリカの translog 集計された生産の差は、ディビジア離散型近似指

数を用いると、

$$w_{Y_i} = \frac{1}{2}\left[w_{Y_i}^U + w_{Y_i}^J\right]$$

と置いて

$$\ln Y^U - \ln Y^J = \sum_{i=1}^{m} w_{Y_i}\left[\ln Y_i^U - \ln Y_i^J\right]$$

と表現できる。

資本投資KがK_1からK_rまでのr個の要素で成り立っているとして、その集計関数として translog 型集計関数を使用すると、資本投入Kは

$$K = \exp\left[\alpha_1^K \ln K_1 + \alpha_2^K \ln K_2 + \cdots + \alpha_r^K \ln K_r + \right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\beta_{11}^K(\ln K_1)^2 + \beta_{12}^K \ln K_1 \ln K_2 + \cdots + \frac{1}{2}\beta_{rr}^K(\ln K_r)^2\right]$$

と計算できる。日本とアメリカの translog 集計された資本投入の差は、ディビジア離散型近似指数を用いると、

$$w_{K_i} = \frac{1}{2}\left[w_{K_i}^U + w_{K_i}^J\right]$$

と置いて

$$\ln K^U - \ln K^J = \sum_{i=1}^{s} w_{K_i}\left[\ln K_i^U - \ln K_i^J\right]$$

と表現できる。同様に労働投資についても、日本とアメリカのtranslog型集計された労働投資の差を以下のように計算できる。労働投入LがL_1からL_sまでのs個の要素で成り立っているとして、その集計関数としてtranslog型集計関数を使用すると労働投入Lは

$$L = \exp\left[\alpha_1^L \ln L_1 + \alpha_2^L \ln L_2 + \cdots + \alpha_s^L \ln L_s + \right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\beta_{11}^L(\ln L_1)^2 + \beta_{12}^L \ln L_1 \ln L_2 + \cdots + \frac{1}{2}\beta_{ss}^L(\ln L_s)^2\right]$$

と計算できる。日本とアメリカの translog 集計された労働投入の差は、ディビ

ジア離散型近似指数を用いると、

$$w_{L\,i}=\frac{1}{2}\left[w_{L_i}^{U}+w_{L_i}^{J}\right]$$

と置いて

$$\ln L^{U}-\ln L^{J}=\sum_{i=1}^{S}w_{L\,i}\left[\ln L_i^{U}-\ln L_i^{J}\right]$$

と表現できる。

日本とアメリカの技術の差 v_D を、資本投入、労働投入、時間を両国において等しくした時の対数変換した生産の差として定義すると、

$$v_D=\frac{\partial \ln Y}{\partial \ln D}=\alpha_D+\beta_{KD}\ln K+\beta_{LD}\ln L+\beta_{DD}\ln D+\beta_{DT}\ln T$$

と表現できる。

技術の差を表す指数 $\hat{v}_D$ を、対数変換された生産の差から、対数変換された労働投入と資本投入の差を価値分配分を重みとして平均した指数を差し引いたものとして定義すると、

$$\hat{v}_D=(\ln Y^{U}-\ln Y^{J})-\hat{v}_K(\ln K^{U}-\ln K^{J})-\hat{v}_L(\ln L^{U}-\ln l^{J})$$

と表現できる。但し、

$$\hat{v}_K=\frac{1}{2}(v_K^{U}+v_K^{J}),$$

$$\hat{v}_L=\frac{1}{2}(v_L^{U}+v_L^{J}),$$

$$\hat{v}_D=\frac{1}{2}(v_D^{U}+v_D^{J}).$$

V　日本と韓国の全要素生産性

この小論ではデータの制約と時間の制約から、集計データを用いて日本および韓国の全要素生産性の計算を行なってみた。データーは国連の *National*

Accounts Statistics の1989年版から1981年から1989年までの年次データを用いた。表1は日本の全要素生産性を計算したもので、表2は生産の伸び率に対するそれぞれの要素の寄与率を計算してある。全要素生産性の寄与率は、1981年が約6％、1981年が約7％、1981年が再び約6％と低迷しているが、1985年が約13％と大きく伸びた。その後、1988年までは8％から9％で推移し、1989年には約7％まで低下している。表3は韓国の全要素生産性を計算したもので、表4は表2と同様に生産の伸び率に対するそれぞれの要素の寄与率を計算してある。全要素生産性の寄与率は、1981年で約18％と高く、1981年に約12％へ低下し、1984年の約14％から1986年の約15％まで徐々に増加し、その後1989年の約7％まで低下している。生産の伸び率に対する全要素生産性の寄与率を比較すると、1980年代を通じて全般的に韓国の方が日本に比べて高かったことが分かる。

日本の全要素生産性

年	生産	資本	労働	生産性
1981	9.1636	1.4952	7.1181	0.5506
1982	9.0750	1.4429	7.0061	0.6261
1983	8.9488	1.4633	6.9904	0.4951
1984	9.4324	1.4372	6.8772	1.1180
1985	9.6297	1.5304	6.8543	1.2450
1986	9.0382	1.5053	6.7899	0.7430
1987	9.5104	1.6057	7.0424	0.8623
1988	9.9642	1.6646	7.3199	0.9797
1989	9.7284	1.7401	7.3098	0.6785

表1

日本の全要素生産性（寄与率）

年	資本	労働	生産性
1981	0.1632	0.7768	0.0601
1982	0.1590	0.7720	0.0690
1983	0.1635	0.7812	0.0553
1984	0.1524	0.7291	0.1185
1985	0.1589	0.7118	0.1293
1986	0.1666	0.7512	0.0822
1987	0.1688	0.7405	0.0907
1988	0.1671	0.7346	0.0983
1989	0.1789	0.7514	0.0697

表 2

韓国の全要素生産性

年	生産	資本	労働	生産性
1981	8.1959	1.0000	5.7370	1.4588
1982	8.3443	1.1686	6.1776	0.9981
1983	8.8929	1.2348	6.6618	0.9963
1984	8.7803	1.2817	6.3127	1.1859
1985	8.5643	1.3023	6.0922	1.1697
1986	9.2124	1.3454	6.4759	1.3912
1987	9.2998	1.4843	6.8478	0.9677
1988	9.3663	1.4591	6.9859	0.9212
1989	8.8446	1.2780	6.9312	0.6355

表 3

韓国の全要素生産性（寄与率）

年	資本	労働	生産性
1981	0.1220	0.7000	0.1780
1982	0.1400	0.7403	0.1196
1983	0.1388	0.7491	0.1120
1984	0.1460	0.7190	0.1351
1985	0.1521	0.7114	0.1366
1986	0.1460	0.7029	0.1510
1987	0.1596	0.7363	0.1041
1988	0.1558	0.7459	0.0984
1989	0.1445	0.7837	0.0718

表 4

〔レファレンス〕

Christensen, L. R., D. W. Jorgenson, and L. J. Lau, "Conjugate Duality and the Transcendental Logarthmic Production Function", *Econometrica,* 39, 255-256, (1971).

Christensen, L. R., D. W. Jorgenson, aod L. J. Lau, "Transcendental Logarithmic Production Frontiers". *Review of Economics and Statistics,* 55, 28-45, (1971).

Diewert, W. E., "Exact and Superlative Index Numbers", *Journal of Econometrics,* 4, 115-146, (1976).

Jorgenson, D. W. and Z. Griliches, "The Explanation of Productivity Change", *Review of Economic Studies,* 34, 249-283, (1967).

Jorgenson, D. W. and M. Nishimizu, "Sectoral Differences in Levels of Technology: An International Comparison between the United States and Japan, 1955-1972", *unpublised,* (1979).